Differentialrechnung

Beispiele

Günther Schmelzeisen-Redeker

10.01.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Worum es geht...

»Übung macht den Meister« gilt auch für die Differentialrechnung. Deshalb werden in diesem Dokument Beispiele für die Differenziation von Funktionen durchgespielt und erläutert. Zur Sicherheit werden zunächst die wichtigsten Differentiationsregeln wiederholt.

2 Wichtige Grundformeln

Zum Durchrechnen der Beispiele werden die Ableitungen grundlegender Funktionen und die wichtigsten Grundgesetze der Differentialrechnung kurz wiederholt.

2.1 Definition der Ableitung einer Funktion

Die Ableitung $y'(x)$ einer Funktion $y(x)$ (auch Differentialquotient genannt) wird definiert als

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Sie entspricht der Steigung der Tangente an die Funktionskurve im Punkt $(y(x), x)$.

Beispiel 1: $y(x) = x$:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Beispiel 2: $y(x) = c$ (c = konstant); sprich: y hängt nicht von x ab und hat für alle x (also auch für $x + \Delta x$) den Wert c:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(c) - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Übrigens: statt $y'(x)$ schreibt man in viele Fällen $\frac{dy}{dx}$.

2.2 Basisfunktionen

$$y(x) = c \qquad y'(x) = 0 \tag{1}$$

$$y(x) = x^n \qquad y'(x) = n \cdot x^{n-1} \tag{2}$$

$$y(x) = a^x \qquad y'(x) = a^x \cdot \ln a \tag{3}$$

$$y(x) = e^x \qquad y'(x) = e^x \tag{4}$$

$$y(x) = \ln x \qquad y'(x) = \frac{1}{x} \tag{5}$$

$$y(x) = \sin(x) \qquad y'(x) = \cos(x) \tag{6}$$

$$y(x) = \cos(x) \qquad y'(x) = -\sin(x) \tag{7}$$

2.3 Differentiationsregeln

Summenregel:

$$y(x) = f(x) \pm g(x) \qquad y'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Produktregel:

$$y(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel:

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Kettenregel:

$$y(z(x)) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Konstanter Faktor (c):

$$y(x) = c \cdot f(x) \qquad y'(x) = c \cdot f'(x)$$

3 Zur Einstimmung: ein paar Beweise

3.1 Ableitung von $y(x) = x^n$

Die Ableitung von $y(x) = x^n$ kann für $n \in \mathbb{N}$ aus der Ableitung von $y(x) = x$ und der Produktregel hergeleitet werden. Wir beginnen mit $y(x) = x^2$:

$$y(x) = x^2 = x \cdot x$$

Mit $f(x) = x$ und $g(x) = x$ in der Produktregel ergibt sich für die beiden Ableitungen: $f'(x) = 1$ und $g'(x) = 1$. Einsetzen von $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ und $g'(x)$ in die Produktregel ergibt

$$\begin{aligned} y'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= 1 \cdot x + x \cdot 1 \\ &= x + x \\ &= 2 \cdot x \end{aligned}$$

Jetzt gehen wir zu $y(x) = x^3$ über, was wir als $x \cdot x^2$ schreiben. Mit $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ lautet die Produktregel

$$\begin{aligned} y'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x \\ &= x^2 + 2 \cdot x^2 \\ &= 3 \cdot x^2 \end{aligned}$$

Denn wir haben eben gezeigt, dass $g'(x) = 2 \cdot x$.

Indem man generell $y(x) = x^n$ als $y(x) = x \cdot x^{n-1}$ schreibt, wird klar, dass man auf diese Weise die Ableitungsregel von $y(x) = x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ herleiten kann. Übrigens: mit ein paar Tricks kann man beweisen, dass die Regel auch für alle reellen n ($n \in \mathbb{R}$) richtig ist.

3.2 Ableitung von $y(x) = c \cdot z(x)$ (konstanter Faktor bleibt erhalten)

Wieder benutzen wir die Produktregel, in der wir $f(x) = c$ und $g(x) = z(x)$ setzen. Dann ist $f'(x) = 0$ und $g'(x) = z'(x)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= 0 \cdot z(x) + c \cdot z'(x) \\ &= c \cdot z'(x) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten. $y(x) = 5 \cdot x^3$ hat deshalb die Ableitung $y'(x) = 5 \cdot 3 \cdot x^2$ (die Ableitung von x^3 ist $3 \cdot x^2$).

3.3 Herleitung der Quotientenregel aus der Produktregel

Für diese Herleitung benötigt man neben der Produktregel noch die Kettenregel. Wir gehen von folgender Identität aus:

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$y(x)$ ist also das Produkt aus den beiden Funktionen $f(x)$ und $\frac{1}{g(x)}$. Die Produktregel ergibt:

$$y'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

Alles kein Problem bis auf die Ableitung von $\frac{1}{g(x)} = g^{-1}(x)$. Hier wird die Kettenregel und Regel(2) angewandt. Die Ableitung von g^{-1} lautet $-g^{-2}(x) \cdot g'(x)$. Damit kommen wir zu

$$y'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot g^{-2}(x) \cdot g'(x)$$

Oder anders geschrieben

$$y'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Jetzt wird der erste Summand mit $g(x)$ erweitert und dann $\frac{1}{g^2(x)}$ ausgeklammert. Man landet bei der Quotientenregel:

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

4 Einfache Beispiele

Wir beginnen mit ein paar recht einfachen Beispielen für das Ableiten (Differenzieren) von Funktionen.

$y(x) = 3 \cdot x^5$: Die Funktion $f(x) = x^5$ wird mit der Zahl 3 multipliziert; 3 ist ein konstanter Faktor von x^5. Beim Ableiten bleibt die 3 als Faktor erhalten. Die Ableitung gemäß Regel (2) von $f(x) = x^5$ ist $f'(x) = 5 \cdot x^4$. $y'(x)$ ist also $3 \cdot 5 \cdot x^4 = 15 \cdot x^4$

$y(z) = 100 \cdot z^2$: Dies ist die gleiche Situation wie beim vorherigen Beispiel. Nur wird die Variable, von der y abhängt, jetzt »z« statt »x« genannt. Die Benennung ist aber völlig egal, solange man weiß, dass y von z abhängt (was durch die Schreibweise $y(z)$ gewährleistet ist). Die Ableitung ist deshalb
$y'(z) = 100 \cdot 2 \cdot z = 200 \cdot z$

$y(x) = 6 \cdot sin(x)$: Jetzt geht es um die Sinus-Funktion, deren Ableitung $cos(x)$ ist (Regel (6)). Der Sinus wird mit 6 multipliziert; 6 ist also ein konstanter Faktor, der wieder erhalten bleibt. Die Ableitung ist
$y'(x) = 6 \cdot cos(x)$

$y(x) = 6 \cdot 5 \cdot x^4$: Wir haben zwei konstante Faktoren vor der Funktion $f(x) = x^4$. Die Multiplikation der beiden Faktoren ergibt 30. Die Ableitung von $f(x)$ ist $4 \cdot x^3$. Die Ableitung von $y(x)$ lautet also
$y'(x) = 30 \cdot 4 \cdot x^3 = 120 \cdot x^3$

$y(x) = x^2 + \sin(x)$: Hier haben wir es mit der Summe zweier Basisfunktionen von x zu tun: $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(x)$; es muss die Summenregel angewandt werden: die beiden Funktionen werden getrennt nach x abgeleitet und die Ableitungen addiert. $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = \cos(x)$. Insgesamt lautet die Ableitung von $y(x)$:
$y'(x) = 2x + \cos(x)$

$y(x) = 3 \cdot e^x + 5 \cdot \cos(x)$: Wieder liegt die Summe zweier Funktionen vor: $f(x) = 3 \cdot e^x$ und $g(x) = 5 \cdot \cos(x)$. Beide Teilfunktionen sind Produkte einer Basisfunktion und eines konstanten Faktors. Bei deren Ableitung bleibt der konstante Faktor erhalten; die Ableitungen der Basisfunktionen lauten – siehe Regel(4) und (7): $f'(x) = 3 \cdot e^x$ (ändert sich also wegen Regel(4) nicht), $g'(x) = -5 \cdot \sin(x)$ (beachtet das Minuszeichen gemäß Regel(7)). Unter Anwendung der Summenregel lautet die Ableitung von $y(x)$:
$y'(x) = 3 \cdot e^x - 5 \cdot \sin(x)$

$y(x) = 3 \cdot e^x - 5 \cdot \sin(x)$: Jetzt wird's lustig: wir leiten die Ableitung der vorherigen Funktion noch mal ab (d.h. wir berechnen die zweite Ableitung)! Wieder sind die Summenregel und die Erhaltung eines konstanten Faktors zu beachten. Das Ergebnis:
$y'(x) = 3 \cdot e^x - 5 \cdot \cos(x)$
Wir erhalten also in diesem speziellen Falle die ursprüngliche Funktion fast wieder zurück; es wurde nur das Vorzeichen des Cosinus-Teils gewechselt.

5 Anwendung der Produkt- und Quotientenregel

$y(x) = x^2 \cdot \sin(x)$: Wir haben es mit dem Produkt zweier Basisfunktionen, deren Ableitung wir kennen, zu tun: mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(x)$. Die Ableitungen dieser Funktionen lauten $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = \cos(x)$. Diese vier Formeln setzen wir in die Produktregel ein:

$$y'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

Fertig... Wichtig ist, die Basisfunktionen in einer Formel zu identifizieren, um zu sehen, welche Differentiationsregeln anzuwenden sind. Bei der Produkt-/Quotientenregel ist das meist einfach. Etwas verwirrender ist es häufig bei der Kettenregel (siehe weiter unten).

$y(x) = x^2 \cdot e^x + x \cdot \cos(x)$: Wir haben die Summe zweier Funktionen von x, die beide keine Basisfunktionen sind: $x^2 \cdot e^x$ und $x \cdot \cos(x)$. Aufgrund der Summenregel können beide getrennt nach x abgeleitet werden. Beide Summanden sind Produkte aus Basisfunktionen; x^2 und e^x bzw. x und $\cos(x)$.
Wir wenden getrennt auf beide die Produktregel an. Beim ersten Summanden lauten die Ableitungen der Basisfunktionen $2x$ und e^x. Damit ergibt sich als Ableitung des ersten Summanden

$$\left(x^2 \cdot e^x\right)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$$

Die Ableitungen der Basisfunktionen des zweiten Summanden lauten 1 und $-\sin(x)$; das ergibt für den Summanden als Ableitung

$$\left(x \cdot \cos(x)\right)' = 1 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x)$$

Jetzt müssen die beiden Summanden-Ableitungen nur noch addiert werden:

$$y'(x) = (2x + x^2) \cdot e^x + \cos(x) - x \cdot \sin(x)$$

$y(x) = x^2 \cdot 5 \cdot x^4$: Wieder haben wir das Produkt zweier Basisfunktionen: x^2 und $5x^4$. Die Ableitungen lauten $2x$ und $5 \cdot 4 \cdot x^3 = 20x^3$. Einsetzen in die Produktregel:

$$y'(x) = 2x \cdot 5x^4 + x^2 \cdot 20x^3$$

Vereinfachung ergibt

$$y'(x) = 10x^5 + 20x^5 = (10 + 20)x^5 = 30x^5$$

Das Ergebnis hätte man auch einfacher haben können; denn $x^2 \cdot 5 \cdot x^4 = 5 \cdot x^6$; und das ergibt abgeleitet nach Regel(2) und der Erhaltung eines konstanten Faktors $5 \cdot 6 \cdot x^5 = 30x^5$. Es lohnt sich also, erst mal zu schauen, ob die abzuleitende Funktion vereinfacht werden kann...

$y(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$: Ein letztes Beispiel für die Anwendung der Produktregel. Die beiden multiplizierten Basisfunktionen sind $\sin(x)$ und $\cos(x)$. Deren Ableitungen sind $\cos(x)$ und $-\sin(x)$. Einsetzen in die Produktregel:

$$y'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Wenn man will, kann man das noch anders schreiben, indem die bekannte trigonometrische Beziehung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ nach $\sin^2(x)$ aufgelöst und einsetzt wird:

$$y'(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

$y(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$: Nun zur Quotientenregel: $y(x)$ ist der Quotient zweier Basisfunktionen: $f(x) = e^x$ im Zähler und $g(x) = x^2$ im Nenner (die Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert und dort auch nicht differenzierbar, aber überall sonst). Die Ableitungen der Basisfunktionen lauten $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = 2x$. Einsetzen in die Quotientenregel ergibt

$$y'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

Oder noch etwas vereinfacht

$$y'(x) = \frac{x \cdot e^x \cdot (x - 2)}{x^4} = \frac{e^x \cdot (x - 2)}{x^3}$$

$y(x) = \frac{x^5}{x^2}$: Und noch ein Beispiel, das auch einfacher als mit der Quotientenregel zu differenzieren ist. Denn es gilt nach Kürzen des Bruchs $y(x) = x^3$ und das ist abgeleitet $y'(x) = 3x^2$. Doch was sagt die Quotientenregel? Die Ableitung des Zählers ergibt $5x^4$, die des Nenners $2x$. Einsetzen in die Quotientenregel:

$$y'(x) = \frac{5x^4 \cdot x^2 - x^5 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{5x^6 - 2x^6}{x^4} = 3x^2$$

Holldrioh, das gleiche Ergebnis wie vorher.

$y(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$: Zur Erinnerung: der Tangens ist der Quotient aus Sinus und Cosinus! Wieder identifizieren wir:
$f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)$ und $g'(x) = -\sin(x)$

$$y'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Die Ableitung des Tangens ist das inverse Quadrat des Cosinus. Übrigens: die Ableitung des Cotangens ($\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$) ist $\frac{-1}{\sin^2(x)}$.

6 Die Kettenregel: Königsdisziplin der Differentialrechnung

Die Kettenregel spielt vor allem in der angewandten Mathematik – in Physik, Chemie etc. – eine sehr wichtige Rolle. Um die Kettenregel anzuwenden, muss man Übung darin entwickeln, Basis- von zusammengesetzten Funktionen zu unterscheiden. Fangen wir gleich an:

$y(x) = e^{2x}$: Wenn es hieße $y(x) = e^x$, wäre die Differentiation einfach. e^x ist eine Basisfunktion, für die wir die Ableitung kennen, nämlich ebenfalls e^x. Wir haben aber im Exponenten $2x$, eine Funktion von x, stehen, nicht x allein. Wir brauchen die Kettenregel.

Für die Kettenregel ist es günstiger die Ableitung nicht y', sondern $\frac{dy}{dx}$ zu schreiben. Die Kettenregel lautet: Wenn eine Funktion y von z und z von x abhängig ist, also $y = y(z(x))$, gilt für die Ableitung nach x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Ok, ist sehr abstrakt. Wenden wir die Kettenregal auf unsere Beispielfunktion an. Im Exponenten der e-Funktion steht eine Funktion von x; diese nennen wir z: $z(x) = 2x$. Setzt man dies in die Beispielfunktion ein, ergibt sich $y(z) = e^z$. Man beachte: y ist jetzt eine Funktion von z, nicht x! Die Ableitung von $y(z) = e^z$ nach z (nicht x!) ist einfach, da wir jetzt eine Basisfunktion mit der Variablen z haben.

Laut Kettenregel sind jetzt zwei Ableitungen zu bestimmen $\frac{dy}{dz}$ und $\frac{dz}{dx}$. Dies ergibt

$$\frac{dy}{dz} = e^z \qquad \frac{dz}{dx} = 2$$

Die beiden Ableitungen müssen miteinander multipliziert werden:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot 2$$

Es stört noch das z in der Ableitung $y'(x)$. Wir ersetzen es durch die Definitionsgleichung für z, nämlich $z(x) = 2x$, und erhalten

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot 2$$

Das Rezept für die Anwendung der Kettenregel lautet:

1. Untersuche mögliche Basisfunktionen in der Funktionsgleichung $y(x)$ darauf, ob statt x eine Funktion von x auftaucht; wir nennen diese $z(x)$.
2. Gibt es nur ein einziges $z(x)$, ersetze $z(x)$ durch die Variable z.
3. Differenziere y nach der neuen Variablen z.
4. Differenziere z nach x.
5. Multipliziere die beiden Ableitungen.

6. Ersetze z zurück durch z(x), sodass nur noch x als unabhängige Variable in der Ableitung $y'(x)$ steht.

Sollten mehrere unterschiedliche Funktionen $z_1(x)$, $z_2(x)$ etc. in den Basisfunktionen auftauchen, wird es komplizierter. Dann ist die Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher gefragt, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen. Nur so viel zum neugierig machen bzw. für diejenigen, die bereits mit diesem Gebiet der Analysis Erfahrung gesammelt haben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx}$$

Dies war ein theorielastiger Exkurs, um die Kettenregel zu erläutern. Jetzt geht es zurück zu Anwendungsbeispielen.

$y(x) = \sin(x^2)$: Wir wenden unser Rezept an:

1. Basisfunktion: $\sin(x)$
2. $z(x) = x^2$
3. Ersetzen von $z(x)$ durch z: $y(z) = \sin(z)$
4. Ableitung von y nach z: $\frac{dy}{dz} = \cos(z)$
5. Ableitung von z nach x: $\frac{dz}{dx} = 2x$
6. Multiplikation der beiden Ableitungen:
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 2x \cdot \cos(z)$
7. Ersetzen von z durch $z(x)$: $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$
8. Fertig, feiern!

$y(x) = \sin^2(x)$: Wir wenden unser Rezept an:

1. Basisfunktion: x^2
2. $z(x) = \sin(x)$
3. Ersetzen von $z(x)$ durch z: $y(z) = z^2$
4. Ableitung von y nach z: $\frac{dy}{dz} = 2z$
5. Ableitung von z nach x: $\frac{dz}{dx} = \cos(x)$
6. Multiplikation der beiden Ableitungen:
   $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 2z \cdot \cos(x)$
7. Ersetzen von z durch $z(x)$: $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

Übrigens: das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man $\sin^2(x)$ als $\sin(x) \cdot \sin(x)$ schreibt und die Produktregel anwendet.

$y(x) = e^{x^2+x}$: Wir wenden unser Rezept an:

1. Basisfunktion: e^x
2. $z(x) = x^2 + x$
3. Ersetzen von $z(x)$ durch z: $y(z) = e^z$
4. Ableitung von y nach z: $\frac{dy}{dz} = e^z$
5. Ableitung von z nach x: $\frac{dz}{dx} = 2x + 1$
6. Multiplikation der beiden Ableitungen:
   $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = (2x + 1) \cdot e^z$
7. Ersetzen von z durch $z(x)$: $\frac{dy}{dx} = (2x + 1) \cdot e^{x^2+x}$

Übrigens: das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man e^{x^2+x} als $e^{x^2} \cdot e^x$ schreibt und die Produktregel anwendet. Bei der Produktregel muss e^{x^2} berechnet werden, was seinerseits die Kettenregel erfordert. Das machen wir im nächsten Beispiel.

$y(x) = e^{x^2}$: Wir wenden unser Rezept an:

1. Basisfunktion: e^x
2. $z(x) = x^2$
3. Ersetzen von $z(x)$ durch z: $y(z) = e^z$
4. Ableitung von y nach z: $\frac{dy}{dz} = e^z$
5. Ableitung von z nach x: $\frac{dz}{dx} = 2x$
6. Multiplikation der beiden Ableitungen:
   $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 2x \cdot e^z$
7. Ersetzen von z durch $z(x)$: $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}$

Zum Schluss noch eine vertrackte Funktionsgleichung mit einer Verschachtelung:
$y(x) = y(z(w(x)))$:

$y(x) = e^{\sin(x^2)}$:

Wir wenden unser Rezept an:

1. Die erste Basisfunktion ist e^x
2. $z(x) = \sin(x^2)$; dummerweise ist aber auch das noch keine wirkliche Basisfunktion ($\sin(x)$ wäre eine solche)
3. Deshalb Ersetzen von x^2 in z(x) durch $w(x) = x^2$: $z(w) = \sin(w)$
4. Kettenregel lautet jetzt:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dw}\frac{dw}{dx}$$
5. Ableitung von y nach z: $\frac{dy}{dz} = e^z$
6. Ableitung von z nach w: $\frac{dz}{dw} = \cos(w)$
7. Ableitung von w nach x: $\frac{dw}{dx} = 2x$
8. Multiplikation der drei Ableitungen:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dw}\frac{dw}{dx} = e^z \cdot \cos(w) \cdot 2x$$
9. Ersetzen von w durch $w(x)$ und z durch $z(x)$:
$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2) \cdot e^{\sin(x^2)}$$

Man sieht: es kann echt kompliziert werden...

7 Schlussbemerkungen

Wer sich bis hierher durchgekämpft hat, wird es bemerkt haben: nur durch Üben bekommt man Sicherheit beim Differenzieren. Dazu kann man sich alle möglichen Funktionen zusammenreimen – einfache und komplizierte – und diese abzuleiten versuchen.

Im Internet gibt es eine Reihe von Seiten, die Ableitungen von Funktionen ermitteln können, z.B. der Ableitungskalkulator von WolframAlpha®, der unter der Internetadresse »https://de.wolframalpha.com/calculators/derivative-calculator« erreicht werden kann (ich habe ihn benutzt, um meine Ableitungen vorsichtshalber auf Richtigkeit zu prüfen...).

Er liefert nicht nur die Funktionsgleichung der Ableitung, sondern auch Plots und eine Menge weiterer Informationen.

Da bleibt mir nur, euch viel Erfolg beim Differenzieren zu wünschen!